Développement : Point de Fermat d'un triangle.

RM

2022-2023

Référence :

1. calcul diff à l'agreg rouvière

Énoncé :

Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$; on suppose les trois angles du triangle ABC strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Soit f la fonction qui à un point M associe la somme des distances $f(M) = AM + MB + MC$.
Alors f admet un minimum en un point P, intérieurs strictement à ABC. De plus, ce minimum est global strict et les angles $\widehat{APB}, \widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$.

Résolution :

L'idée est que, la fonction f tendant vers l'infini à l'infini, il suffit de rechercher son minimum sur un compact. Si O est une origine quelconque on a $OM \leq OA + AM$ et donc $MA \geq OM - OA$ par inégalité triangulaire, d'où avec le même résultat pour B et C

$$f(M) = MA + MB + MC \geq 3OM - (OA + OB + OC) = 3OM - f(O).$$

Et en particulier $f(M) > f(O)$ dès que $OM > \frac{2}{3}f(O)$. Sur le disque compact de centre O défini par $OM \leq \frac{2}{3}f(O)$, la fonction continue f atteint son minimum en (au moins) un point P, qui donne aussi le minimum sur tout le plan.

> En effet, si nous sommes pas sur ce compact, on a $f(M) > f(O)$ et donc M ne sera jamais un minimum de f. Et c'est la compacité qui nous assure l'existence du minimum en au moins un point.

Montrons que P ne peut pas être un sommet du triangle ABC. Deux au moins de ces trois angles sont strictement inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, par exemple les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Le pieds H de la hauteur issue de A est alors entre B et C (strictement), d'où

$$f(H) = HA + HB + HC = HA + BC < BA + BC = f(B) \text{ car } BA \text{ hypotnénus de } AHB$$

De même dans le triangle AHC, on obtient que $F(H) < f(C)$; le minimum de f n'est donc atteint ni en B ni en C.
Il n'est pas non plus atteint en A : c'est clair par le raisonnement précédent si $\widehat{A} < \frac{\pi}{2}$. La cas $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{A} < \frac{2\pi}{3}$ demande un autre argument. Considérons par exemple un point M voisin de A sur la bissectrice intérieur de l'angle $\widehat{A} = 2\alpha$. On a d'après la formule d'al kashi

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2.AB.AM\cos\alpha$$

Ensuite on pose $g(M) = AB^2 + AM^2 - 2.AB.AM\cos\alpha$. Lorsque M tends vers A, on a $AM^2 = O\left(AM^2\right)$.

Donc $g(M) = AB^2 - 2.AB.AM\cos\alpha + O\left(AM^2\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
MB = \sqrt{g(M)} &= \sqrt{AB^2 - 2.AB.AM\cos\alpha + O\left(AM^2\right)} \\
&= AB\sqrt{1 - 2\frac{AM}{AB}\cos\alpha + O\left(AM^2\right)} \\
&= AB\left(1 + \frac{1}{2}(-2\frac{AM}{AB}\cos\alpha + O\left(AM^2\right)\right) \\
&= AB\left(1 - \frac{AM}{AB}\cos\alpha + O\left(AM^2\right)\right) \\
&= AB - AM\cos\alpha + O\left(AM^2\right)
\end{aligned}$$

Lorsque que M tends vers A. En évaluant de même MC on obtient

$$f(M) = MA + AB - AM\cos\alpha + AC - AM\cos\alpha + O\left(AM^2\right) = f(A) + (1 - 2\cos\alpha)AM + O\left(AM^2\right).$$

Comme $0 < 2\alpha < \frac{2\pi}{3}$ on a $\cos\alpha > 1/2$ donc $1 - 2\cos\alpha < 0$. On a bien que $f(M) < f(A)$ lorsque m est assez voisin de A; le minimum de f ne peut être donc atteint en A.
Enfin le minimum de f ne peut être atteint en un point P strictement extérieur au triangle ABC : si par exemple P et A sont de part et d'autre de la droite BC, le symétrique P' de P par rapport à cette droite donne $P'A < PA$,$P'B = PB$ et $P'c = PC$ et donc $f(P') < f(P)$.

D'après le travail précédent, le minimum de f sur le plan et aussi son minimum sur le complémentaire de $\{A, B, C\}$. Sur cet ouvert, la fonction f est de classe C^∞ et on a

$$\mathrm{grad} f(P) = -(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).$$

avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PA}/PA$,$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PB}/PB$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PC}/PC$ (vecteur unitaires).
En effet on note $f(M) = f_A(M) + f_B(M) + f_C(M)$ et on a $\mathrm{grad} f(M) = \mathrm{grad} f_A(M) + \mathrm{grad} f_B(M) + \mathrm{grad} f_C(M)$ car le gradient est linéaire. Calculons le gradient de l'application partiel $F_A(M)$, qui nous donnera les autres.
On note (x, y) les coordonnées de M. On a $f_A(M) = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}$. Donc

$$\mathrm{grad} f_A(M) = \left(\frac{f_A(x,y)}{\partial x}, \frac{f_A(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{-2(x_A - x)}{2MA}, \frac{-2(y_A - y)}{2MA}\right) = -\frac{1}{MA}\left(x_A - x, y_A - y\right) = -\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$$

On retrouve bien la formule en additionnant les 3 gradients partiels.
La condition nécessaire d'extremum en P s'écrit donc

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0.$$

Elle entraîne

$$1 = \overrightarrow{w}^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = 1 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + 1.$$

par suite $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -1/2$, d'où $\widehat{APB} = 2\pi/3$ et de même pour les angles $\widehat{PBC}$ et $\widehat{CPA}$.
Enfin, du point P on voit le segment AB sous l'angle $2\pi/3$, donc P appartient à un arc de cercle d'extrémité A et B (arc capable), et de même à un arc capable d'extrémités A et C. Ces deux arcs se coupent en A et en P, distinct de A d'après 1, et n'ont pas d'autre point commun (sinon ils seraient contenus dans un même cercle, et un angle du triangle ABC serait égal à $2\pi/3$).
Finalement la fonction f atteint son minimum global en un unique point P appelé point de Fermat du triangle ABC, intersection des trois arcs capables d'où l'on voit chacun des trois côtés du triangle sous l'angle $2\pi/3$. C'est un minimum strict puisqu'il n'est atteint en aucun autre point.